Université Paris XII Val de Marne Année 2005-2006

Corrigé de l'examen de Calcul Différentiel

Exercice 1

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \big(x+y^2, y+z^2, z+x^2\big). \end{array} \right.$

1. La fonction f est C^1 car toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathbb{R}^3$. On a de plus

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $Df(x,y,z)$ est toujours de rang au moins 2 (les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes). De plus $\det Df(x,y,z) = 1 + 8xyz$. Donc $Df(x,y,z)$ est de rang 3 si $xyz \neq -1/8$, et de rang 2 sinon.

2. Le théorème d'inversion locale s'applique au voisinage de tout point (x,y,z) tel que $Df(x,y,z)$ soit inversible. On en déduit que f est localement inversible près de tout point (x,y,z) tel que $xyz \neq -1/8$.

3. L'application f n'est pas injective. En effet, on a $f(-1,-1,-1) = f(0,0,0)$.

4. Un calcul immédiat donne l'égalité voulue. On en déduit que si $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ est choisi de telle sorte que $x' + y' + z' + \frac{3}{4} < 0$ alors (x',y',z') n'a pas d'antécédent par f. Donc f n'est pas surjective.

5. En notant (f_1, f_2, f_3) les composantes de f, on a $f^*\alpha = df_1 \wedge df_2$. D'après le calcul de la première question, on a donc

$$\begin{array}{rcl} f^*\alpha & = & \big(dx + 2y\,dy\big) \wedge (dy + 2z\,dz), \\ & = & dx \wedge dy + 2z\,dx \wedge dz + 4yz\,dy \wedge dz. \end{array}$$

Donc

$$d(f^*\alpha) = 2dz \wedge dx \wedge dz + 4y\,dz \wedge dy \wedge dz + 4z\,dy \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Par ailleurs, $d\alpha = 0$. Donc $f^*(d\alpha) = 0$.

On remarque que $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$. (Cette propriété est en fait toujours vraie mais dépasse le programme du cours).

Exercice 2

1. Un calcul immédiat donne $Dg(x,y) = e^{x\sin y}(\sin y \quad x\cos y)$. Donc (x,y) est point critique de g si et seulement si $\sin y = 0$ et $x \cos y = 0$ autrement dit si et seulement si $(x,y) = (0, k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La matrice hessienne de g est

$$D^2 g(x,y) = e^{x\sin y} \begin{pmatrix} \sin^2 y & (1 + x\sin y)\cos y \\ (1 + x\sin y)\cos y & -x\sin y + x^2\cos^2 y \end{pmatrix}.$$

On a donc $D^2g(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Cette matrice est toujours de déterminant strictement négatif. D'après un résultat du cours, les points critiques sont donc des points selles.

2. L'ensemble Γ n'est pas vide (car contient $(\log 2, \frac{\pi}{2})$ par exemple). Par ailleurs, g est C^1 et, d'après la question précédente, les seuls points d'annulation de $Dg(x,y)$ sont des points où $g(x,y)=1$. Donc Γ est une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Inégalité de Young)

1. La dérivée seconde de la fonction log est une fonction strictement négative sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Donc log est une fonction concave (et même strictement concave).
2. On en déduit que pour tout $t \in]0,1[$ et $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, on a

$$\log\Big(tx+(1-t)y\Big) \geq t\log x + (1-t)\log y.$$

   Le membre de droite vaut $\log\Big(x^t y^{1-t}\Big)$ ce qui permet de conclure à l'inégalité souhaitée.
3. Si a ou b est nul, l'inégalité est évidente. Supposons $a>0$ et $b>0$. On peut appliquer l'inégalité précédente à $x=a^p$, $y=b^q$ et $t=1/p$. Sachant que $1-t=1/q$, on obtient

$$\log\Big(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\Big) \geq \log(ab).$$

   Il ne reste plus qu'à prendre l'exponentielle des deux membres pour conclure.

Exercice 4 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

1. (a) Notons (F_1,F_2) les composantes de F. On a par définition de F_1

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_1(x+h,y)-F_1(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\Re e\Big(\frac{f(x+iy+h)-f(x+iy)}{h}\Big) = \Re e f'(x+iy).$$

   Donc $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)$ existe et vaut $\Re e f'(x+iy)$.
   De même, on a

$$\lim_{k\to 0}\frac{F_1(x,y+k)-F_1(x,y)}{k} = \lim_{h\to 0}\Re e\Big(i\frac{f(x+iy+ik)-f(x+iy)}{ik}\Big) = -\Im m f'(x+iy),$$

   donc $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$ existe et vaut $-\Im m f'(x+iy)$.
   On procède de même pour F_2, et l'on obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ DF(x,y) = \begin{pmatrix} \Re e f'(x+iy) & -\Im m f'(x+iy) \\ \Im m f'(x+iy) & \Re e f'(x+iy) \end{pmatrix}.$$

   Comme f' est continue, toutes les dérivées partielles de F sont continues. Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) On a $\det DF(x,y) = |f'(x+iy)|^2$. Donc $DF(x,y)$ est inversible si et seulement si $f'(x+iy) \neq 0$.

2. (a) La propriété d'holomorphie est clairement stable par combinaison linéaire. Il suffit donc de démontrer le résultat pour tout polynôme du type $P(z) = z^n$. Pour tout $(z,h) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k} = z^n + nz^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2).$$

Donc $z \mapsto z^n$ est holomorphe et sa dérivée holomorphe est $z \mapsto nz^{n-1}$. Cela permet de conclure que tout polynôme P est holomorphe de dérivée holomorphe P'.

(b) i. L'ensemble K est l'image par P de $\{z \in \mathbb{C} \,/\, P'(z) = 0\}$. Comme P' est un polynôme non nul, il existe un nombre fini de $z \in \mathbb{C}$ tels que $P'(z) = 0$. Donc K a un nombre fini d'éléments.

ii. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+iy \in K\}$ est fermé car a un nombre fini d'éléments. Son complémentaire Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

iii. Soit $(x_0,y_0) \in \Omega$ et $(x_1,y_1) \in \Omega$. Supposons $(x_0,y_0) \neq (x_1,y_1)$ (sinon l'existence d'un chemin allant de (x_0,y_0) à (x_1,y_1) est triviale). Fixons $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte centrée en (x_1,y_1) et de rayon ϵ soit inclue dans Ω et ne contienne pas (x_0,y_0). Pour $\eta \in]-\epsilon,\epsilon[$, notons D_η la droite passant par (x_0,y_0) et $(x_1+\eta,y_1)$. Les droites D_η s'intersectent en un unique point : (x_0,y_0). Comme K contient un nombre fini de points, on en déduit que seul un nombre fini de droites D_η ne sont pas inclues dans Ω. Choisissons η tel que $D_\eta \subset \Omega$ puis considérons le chemin polygonal formé par le segment d'extrémités (x_0,y_0), $(x_1+\eta,y_1)$, et $(x_1+\eta,y_1)$, (x_1,y_1). Ce chemin est entièrement contenu dans Ω. Donc Ω est bien connexe par arc.

(c) i. On a $Q(x,y) = (x_0,y_0)$ si et seulement si $P(x+iy)-(x_0+iy_0) = 0$. Le polynôme $P(x+iy)-(x_0+iy_0)$ n'est pas constant (puisque P n'est pas constant par hypothèse) donc a un nombre fini de racines. En conséquence $N(x_0,y_0)$ est fini.

ii. Soit (x_j,y_j) une solution de $Q(x_j,y_j) = (x_0,y_0)$. Par hypothèse $(x_0,y_0) \in \Omega$ donc $P'(x_j+iy_j) \neq 0$. D'après la question 1b, la matrice $DQ(x_j,y_j)$ est donc inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe donc un voisinage V_j de (x_0,y_0) (inclus dans Ω) et un voisinage U_j de (x_j,y_j) tel que Q soit un difféomorphisme de U_j sur V_j. Quitte à diminuer les U_j et les V_j, on peut de plus supposer que les U_j sont deux à deux disjoints. En prenant $V = \cap_{j=1}^k V_j$, on peut maintenant conclure que pour tout $(x_0',y_0') \in V$ l'équation $Q(x,y) = (x_0',y_0')$ a au moins k solutions.

iii. Supposons par l'absurde que N n'est pas continue en (x_0,y_0). Vu la question précédente, cela signifie que l'on peut trouver une suite $(x_n',y_n')_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers (x_0,y_0) et telle que l'équation $Q(x,y) = (x_n',y_n')$ ait au moins $k+1$ solutions (x_n^j,y_n^j) avec $j = 1,\cdots,k+1$. Comme Q tend vers l'infini à l'infini (car est construit à partir d'un polynôme non constant), les solutions de $Q(x,y) = (x_n',y_n')$ appartiennent à un ensemble compact. Quitte à extraire des sous-suites, on peut donc supposer que chaque (x_n^j,y_n^j) tend vers (x^j,y^j) solution de $Q(x,y) = (x_0,y_0)$. Comme cette dernière équation n'a que k solutions, les (x^j,y^j) ne sont pas deux à deux distincts. Par exemple $(x^k,y^k) = (x^{k+1},y^{k+1})$. Mais par ailleurs $P(x_n^k+iy_n^k) = P(x_n^{k+1}+iy_n^{k+1})$. On en déduit par passage à la limite que $P'(x^k+iy^k) = 0$. En conséquence $(x_0,y_0) \in K$, ce qui est contraire à nos hypothèses. Donc N est continue en (x_0,y_0).

iv. Fixons (x_0, y_0) dans Ω. Soit (x_1, y_1) un autre point de Ω et $\varphi : [0,1] \longrightarrow \Omega$ continue telle que $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ et $\varphi(1) = (x_1, y_1)$.

La fonction $N \circ \varphi$ est continue de $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle est donc nécessairement constante.

Comme (x_1, y_1) était arbitraire, on peut conclure que N est constante sur Ω.

(d) Si $0 \in K$, il n'y a rien à montrer : P prend bien la valeur 0.

Supposons que $0 \in \Omega$ et choisissons $z_0 \in P(\mathbb{C})$ quelconque. On a donc $N(z_0) \geq 1$. D'après la question précédente, on a $N(0) = N(z_0)$, donc $N(0) \geq 1$. Autrement dit il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_1) = 0$.