

CORRIGÉ DE L'EXAMEN D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Exercice 1

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Posons $g(x) = f(x) - x$. Il est clair que g est continue et que $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g admet donc au moins un point d'annulation x_0 . On constate alors que $f(x_0) = x_0$.
2. Il n'y a pas de raison pour que f ait un seul point fixe. Par exemple l'application $x \mapsto x$ vérifie les hypothèses de l'énoncé et a une infinité de points fixes.
3. Soit (X, d) un espace métrique *complet* et $f : X \rightarrow X$ une application strictement contractante c'est-à-dire telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in X^2, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe.

Exercice 2

1. L'ensemble E est un sous-ensemble non vide (car contient par exemple la suite nulle) de l'ensemble des suites réelles. Il est clair que la propriété de convergence vers 0 est stable par combinaison linéaire. Donc E est stable par combinaison linéaire et l'on peut donc conclure que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, donc un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

L'ensemble F contient la suite nulle et est un sous-ensemble de E car toute suite nulle à partir d'un certain rang converge bien vers 0. Maintenant, si $(x, y) \in F^2$ alors il existe $N_x \in \mathbb{N}$ et $N_y \in \mathbb{N}$ tels que $x_n = 0$ pour $n \geq N_x$ et $y_n = 0$ pour $n \geq N_y$. En conséquence, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda x_n + \mu y_n = 0$ pour $n \geq \max(N_x, N_y)$, ce qui garantit que $\lambda x + \mu y \in F$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E . Enfin, la suite de terme général 2^{-n} appartient à E mais pas à F donc F est strictement inclus dans E .

2. Tout d'abord, le fait que toute suite convergente soit bornée garantit que pour tout $u \in E$, $\|u\|_\infty$ est fini. Ensuite, on remarque que :
 - pour tout $u \in E$, on a $\|u\|_\infty \geq 0$ et $\|u\|_\infty = 0$ si et seulement si $|u_n| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc si et seulement si $u = 0$;
 - si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda u_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda| |u_n| = |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = |\lambda| \|u\|_\infty;$$

- pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$\|u + v\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_n| + |v_n|) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_n| = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

En conséquence, $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

Afin de montrer que F est dense dans E , fixons une suite quelconque u de E et un réel strictement positif ε . Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Définissons alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = u_n$ si $n < N$ et $v_n = 0$ sinon. Il est clair que $v \in F$ et que $\|u - v\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme notre raisonnement est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $u \in \overline{F}$. La suite u étant arbitraire dans E , on peut conclure que F est dense dans E .

3. Soit $(u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E . En utilisant la définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on voit que cela est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, (q \geq p \geq P) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, |u_n^q - u_n^p| \leq \varepsilon). \quad (1)$$

Cela montre qu'à n fixé dans \mathbb{N} , la suite $(u_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} donc converge vers un réel. Notons-le u_n .

Fixons $\varepsilon > 0$ et $P \in \mathbb{N}$ donné par (1) puis, pour $p \geq P$ fixé, faisons tendre q vers l'infini. Il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - u_n^p| \leq \varepsilon$. On a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, p \geq P \implies \|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la suite u est bien dans E , autrement dit, qu'elle converge vers 0. Soit donc $\varepsilon > 0$. On choisit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Comme $u^p \in E$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n^p| \leq \varepsilon/2$ pour $n \geq N$. En conséquence, pour $n \geq N$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc u converge bien vers 0.

On peut maintenant conclure que toute suite de Cauchy de E est convergente (dans E). Donc E est complet.

Un espace vectoriel normé complet est nécessairement fermé. Or tel n'est pas le cas de F puisque nous avons établi que $\overline{F} = E$ et $F \neq E$. Donc F n'est pas complet.

4. (a) On a pour tout $u \in \ell^1$, $v \in E$ et $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N |u_n v_n| \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty.$$

En conséquence, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, donc convergente dans \mathbb{R} , et Φ_u est donc bien définie en tant qu'application de E dans \mathbb{R} . La linéarité de Φ_u découle de la bilinéarité du produit de deux réels, et l'inégalité ci-dessus montre que $|\Phi_u(v)| \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty$. En conséquence, Φ_u est une forme linéaire continue de norme au plus $\|u\|_1$. Pour montrer l'égalité, on peut considérer pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $(v_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n^p = 1$ si $n \leq p$ et $u_n \geq 0$, $v_n^p = -1$ si $n \leq p$ et $u_n < 0$, et 0 si $n > p$. Il est clair que $v^p \in F$ et que $\|v^p\|_\infty = 1$. De plus $\Phi_u(v^p) = \sum_{k=0}^p |u_k|$ donc converge vers $\|u\|_1$ lorsque p tend vers l'infini. En conséquence, on doit avoir $\|\Phi_u\|_{E'} \geq \|u\|_1$, puis, en vertu de ce que l'on a établi précédemment, $\|\Phi_u\|_{E'} = \|u\|_1$.

- (b) D'après la question précédente, Φ est bien définie de ℓ^1 dans E' , et conserve la norme. La linéarité de Φ est évidente, ainsi que l'injectivité (puisque Φ conserve la norme).

Reste à montrer la surjectivité. Pour ce, fixons $f \in E'$ et définissons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = f(e_n)$ où e_n est la suite de E dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang n qui vaut 1. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N |f(e_n)|.$$

Or $\sum_{n=0}^N |f(e_n)| = f(v^N)$ où v^N est la suite de F nulle à partir du rang $N + 1$ et égale au signe de $f(e_n)$ sinon. En conséquence, on a toujours $\sum_{n=0}^N |f(e_n)| \leq \|f\|_{E'}$ et la série $\sum u_n$ est donc absolument convergente. Autrement dit, $u \in \ell^1$.

Enfin, il est facile de voir que f coïncide avec Φ_u sur le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais ce sous-espace vectoriel n'est autre que F , et est donc dense dans E . Les formes linéaires f et Φ_u étant continues sur E , on en déduit qu'elles coïncident sur E .

Exercice 3

1. On définit d'abord $\mathcal{L}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , mesurables sur $[0, 1]$ et telles que $\int_0^1 f^2(t) dt < \infty$. L'ensemble $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ est alors l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathcal{L}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ pour la relation d'équivalence d'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue de $[0, 1]$.
2. Si $f \in H$ alors tout représentant de f est mesurable, donc son produit avec la fonction $x \mapsto x$ aussi. De plus, on peut écrire,

$$\int_0^1 x^2 f^2(x) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx = \|f\|^2.$$

Donc Tf est bien à valeurs dans H . La linéarité de T découle de la bilinéarité du produit de deux fonctions. Enfin l'inégalité ci-dessus montre que T est continue de H dans H de norme au plus 1. Afin de montrer que $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$, considérons la suite de fonctions $f_n : x \mapsto 1_{[1-1/n, 1]}(x)$. On a $\|f_n\|^2 = 1/n$ et

$$\|Tf_n\|^2 = \int_{1-1/n}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}(1 - (1 - 1/n)^3) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3}.$$

En conséquence,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|Tf_n\|}{\|f_n\|} = 1,$$

et l'on a donc $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \geq 1$, puis égalité vu ce que l'on a démontré plus haut.

3. Pour tout $(f, g) \in H^2$, on a

$$(Tf | g) = \int_0^1 tf(t)g(t) dt = \int_0^1 f(t)tg(t) dt = (f | Tg).$$

Donc T est un opérateur auto-adjoint.

4. D'après le cours, comme $T = T^*$, on a

$$\overline{\text{Im } T} = (\ker T)^\perp. \quad (2)$$

Comme la fonction $x \mapsto x$ ne s'annule qu'en 0, la fonction $x \mapsto xf(x)$ est nulle presque partout si et seulement si f est nulle presque partout, donc nulle dans L^2 . Donc $\ker T = \{0\}$, et donc son orthogonal vaut H . D'après (2), $\text{Im } T$ est donc dense dans H . Cet ensemble est strictement inclus dans H car la fonction constante égale à 1 n'a pas d'antécédent par T . En effet, si $Tf = 1$ alors, nécessairement $f(x) = 1/x$ presque partout. Mais la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est clairement pas dans H .

Problème

1. Tout d'abord, remarquons que K est continue, bornée par 1 et que pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $s \mapsto K(s, t)f(t)$ est continue sur $[0, 1]$. Comme toute fonction de H est intégrable sur $[0, 1]$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on peut donc affirmer grâce au théorème de continuité sous le signe intégral, que Tf est continue. La linéarité de T découle de celle de l'intégrale. Par ailleurs, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au fait que $|K| \leq 1$,

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(s, t)f(t) dt \right)^2 ds \leq \int_0^1 \int_0^1 f^2(t) dt ds = \|f\|^2.$$

Donc T est continue de H dans H (et de norme au plus 1).

2. (a) En utilisant l'expression de K , on voit que

$$Tf(s) = (1-s) \int_0^s tf(t) dt + s \int_s^1 (1-t)f(t) dt.$$

Comme les deux intégrands ci-dessus sont des fonctions intégrables sur $[0, 1]$, cela permet de retrouver le fait que Tf est continue sur $[0, 1]$.

(b) Après un petit calcul, on constate que

$$\frac{Tf(s+h) - Tf(s)}{h} = - \int_0^s tf(t) dt + \frac{1}{h} \int_s^{s+h} (t-s)f(t) dt - \int_s^{s+h} f(t) dt + \int_s^1 (1-t)f(t) dt.$$

Comme

$$\left| \frac{1}{h} \int_s^{s+h} (t-s)f(t) dt \right| \leq \int_s^{s+h} |f(t)| dt,$$

le théorème de convergence dominée assure que le deuxième terme du membre de droite tend vers 0 quand h tend vers 0. Il en est de même pour le troisième. En conséquence,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Tf(s+h) - Tf(s)}{h} = - \int_0^s tf(t) dt + \int_s^1 (1-t)f(t) dt.$$

(c) De la question précédente, on déduit que Tf est dérivable sur $[0, 1]$ de dérivée

$$(Tf)'(s) = - \int_0^s tf(t) dt + \int_s^1 (1-t)f(t) dt = \int_s^1 f(t) dt - \int_0^1 tf(t) dt.$$

Le membre de droite est clairement une fonction continue. Donc Tf est C^1 .

3. Si l'on suppose que $f \in \text{Ker } T$ alors on a $Tf = (Tf)' = 0$ et donc, d'après la question précédente,

$$\forall s \in [0, 1], \int_0^1 tf(t) dt = \int_s^1 f(t) dt.$$

En conséquence f a une primitive constante. On en conclut que f est nulle presque partout sur $[0, 1]$, donc nulle dans H .

4. Soit $f \in H$ telle que $Tf = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$. Comme Tf est C^1 , la fonction f aussi. En utilisant l'expression de Tf démontrée dans la question 2, on en déduit que Tf est C^2 . En dérivant l'expression de $(Tf)'$, on constate alors que $(Tf)'' = -f$. Donc $\lambda f'' + f = 0$. Enfin, comme on sait aussi que Tf est nulle en 0 et 1, il en est de même pour f .

5. Si $\lambda \neq 0$ alors la question précédente montre que tout vecteur propre f pour λ doit vérifier

$$f'' + \lambda^{-1}f = 0, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Si $\lambda > 0$, cela signifie que f est du type $f(s) = A \sin(\lambda^{-\frac{1}{2}}s + \varphi)$, les conditions aux limites imposant que $\varphi \equiv 0[\pi]$ et que $\varphi + (\lambda)^{-\frac{1}{2}} \equiv 0[\pi]$. On peut donc supposer (cela n'est pas restrictif quitte à changer A en $-A$) que $\varphi = 0$, et l'on obtient donc l'existence d'un entier non nul n tel que $(\lambda)^{-\frac{1}{2}} = \pi n$. Pour cette valeur de λ , il est évident que e_n vérifie l'équation différentielle ci-dessus. Donc λ est bien valeur propre et le sous-espace propre correspondant est engendré par e_n .

Si $\lambda < 0$, les solutions sont du type $A \text{ch}((-\lambda)^{\frac{1}{2}}s) + B \text{sh}((-\lambda)^{-\frac{1}{2}}s)$ et ne peuvent donc pas satisfaire les conditions aux limites (à moins que $A = B = 0$).

Enfin, on a vu que 0 n'était pas valeur propre.

6. Il est évident que $(e_n)_{n \geq 1}$ est une famille orthonormale de H . Par ailleurs, si $f \in L^2([0, 1])$ alors f peut être prolongée par imparité en une fonction \tilde{f} de $L^2([-1, 1])$ de moyenne nulle. En utilisant la théorie classique des séries de Fourier, on en déduit qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de carrés sommables telles que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)),$$

la convergence ayant lieu au sens $L^2([-1, 1])$.

L'imparité de \tilde{f} garantit que les a_n sont nuls. Donc f peut se décomposer sur la base $(e_n)_{n \geq 1}$.

7. Écrivons $g = \sum_{n \geq 1} c_n e_n$ avec $(c_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$. Si l'on cherche la fonction inconnue f sous la forme $f = \sum_{n \geq 1} d_n e_n$ alors

$$Tf - \lambda f = \sum_{n \geq 1} ((n\pi)^{-2} - \lambda) d_n e_n.$$

En vertu de l'unicité de la décomposition sur une base hilbertienne, on doit donc avoir

$$((n\pi)^{-2} - \lambda) d_n = c_n \quad \text{pour tout } n \geq 1. \quad (3)$$

Il s'agit de vérifier si ces conditions permettent de définir une suite $(d_n)_{n \geq 1}$ de ℓ^2 .

- Premier cas : $\lambda = 0$.

L'équation a au plus une équation puisque $\text{Ker } T = \{0\}$. Par ailleurs, en vertu de (3), on doit avoir $d_n = (n\pi)^2 c_n$ pour tout $n \geq 1$. La fonction correspondante est dans H si et seulement si $\sum (n\pi)^4 c_n^2 < \infty$. Si tel n'est pas le cas, l'équation n'a pas de solution.

- Deuxième cas: il existe $n \geq 1$ tel que $\lambda = (n\pi)^{-2}$.

La relation (3) montre que $c_n = 0$ est une condition nécessaire pour que $Tf - \lambda f = g$ admette une solution. Réciproquement, si $c_n = 0$, on vérifie que toute fonction f telle que $d_k = c_k / ((k\pi)^{-2} - (n\pi)^{-2})$ si $k \neq n$, et d_n arbitraire est bien dans H et vérifie l'équation. Dans le cas $c_n = 0$, l'ensemble des solutions est donc un sous-espace affine de dimension 1.

- Troisième cas: $\lambda \notin \{0\} \cup \{(n\pi)^{-2} / n \geq 1\}$.

On vérifie aisément que l'équation a pour unique solution la fonction f telle que $d_k = c_k / ((k\pi)^{-2} - \lambda)$ pour tout $k \geq 1$.

8. Le spectre de T est l'ensemble des réels λ tels que $T - \lambda \text{Id}$ ne soit pas bijectif de H dans H . Le spectre ponctuel de T est constitué par l'ensemble des valeurs propres de T c'est-à-dire par l'ensemble des réels λ tels que $T - \lambda \text{Id}$ ne soit pas injectif.

Grâce à la question 5, on sait déjà que

$$\sigma_p(T) = \{(n\pi)^{-2} / n \in \mathbb{N}^*\}.$$

La question précédente a permis d'établir que $Tf - \lambda \text{Id}$ est toujours surjectif si λ n'appartient pas à l'ensemble ci-dessus, sauf dans le cas $\lambda = 0$. En conséquence, $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

9. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de H . Notons M une borne de cette suite.

- (a) On sait déjà que toutes les fonctions Tf_k sont C^1 sur $[0, 1]$. En utilisant les expressions de Tf et $(Tf)'$ établies dans la question 2, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in [0, 1], |Tf_k(s)| \leq 2M \quad \text{et} \quad |(Tf_k)'(s)| \leq 2M.$$

- (b) Cela assure que toutes les fonctions Tf_k sont lipschitziennes de rapport $2M$. La famille $(Tf_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc uniformément équicontinue sur $[0, 1]$.

Comme cette suite est aussi uniformément bornée dans \mathbb{R} , d'après le théorème d'Ascoli, $(Tf_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction continue sur $[0, 1]$. La norme $\|\cdot\|_{L^2}$ étant plus faible que la norme uniforme, on en déduit que la convergence a aussi lieu dans H .

Finalement on a donc montré que T transforme toute suite bornée de H en une suite ayant une valeur d'adhérence dans H . Donc T est compact.

10. On remarque que $K(s, t) = K(t, s)$. De ce fait, un calcul facile assure que T est auto-adjoint. Comme de plus T est compact, un théorème du cours montre que $\|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ est égal à la plus grande valeur propre de T , c'est-à-dire $1/\pi^2$. De plus, le vecteur propre correspondant, e_1 , vérifie

$$(T(e_1)|e_1) = \max_{\|f\|=1} (Tf|f).$$